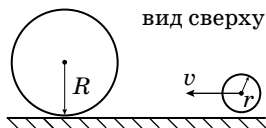


10 КЛАСС

10.1. Шайбы и стенка

Две шайбы находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Малая шайба радиуса r движется со скоростью v вдоль вертикальной стенки при малом зазоре с ней.



Большая шайба радиуса $R = 7r$ касается стенки. Какую скорость u приобретёт большая шайба после всех столкновений, если массы шайб одинаковы? Трения в системе нет, столкновения шайб друг с другом и со стенкой абсолютно упругие.

10.2. Автомобиль на конвейере

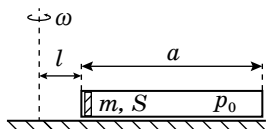
Автомобиль движется по горизонтальному неподвижному конвейеру со скоростью $v_0 = 20$ м/с в безветренную погоду. При этом половина мощности двигателя затрачивается на преодоление сопротивления воздуха, другая половина – на преодоление трения качения.

1. Навстречу автомобилю подул ветер со скоростью $v_0 = 20$ м/с (относительно земли). С какой установившейся скоростью v_1 относительно земли будет двигаться автомобиль, если развиваемая двигателем мощность не изменилась, а конвейер неподвижен?
2. В некоторый момент ветер утих, а конвейер стал двигаться с постоянной скоростью $v_0 = 20$ м/с в сторону, противоположную движению автомобиля. С какой установившейся скоростью v_2 относительно земли будет двигаться автомобиль, если развиваемая двигателем мощность не изменилась?

Примечание1: сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату относительной скорости, сила трения качения постоянна.

Примечание2: во всех случаях проскальзывания колес не возникает.

Примечание3: уравнение третьей степени можно решить методом подбора.

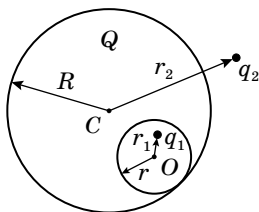


10.3. Трубка на центрифуге

На центрифуге, которая может вращаться только вокруг вертикальной оси, закреплён в горизонтальном положении герметичный легкий цилиндр. Ось цилиндра проходит через ось вращения. Внутри цилиндра находится тонкий поршень, который может перемещаться без трения. Цилиндр заполнен идеальным газом, давлением которого поршень прижат к торцу цилиндра, ближнему к оси вращения. Длина цилиндра равна $a = 0,5$ м, площадь поршня $S = 5$ см², его масса $m = 10$ г, давление газа в цилиндре $p_0 = 1,0$ кПа. Расстояние от оси вращения до ближнего торца цилиндра $l = 0,1$ м. Центрифуга начинает вращаться, причём угловая скорость вращения ω очень медленно увеличивается. Температура газа поддерживается постоянной.

Примечание: считайте, что в ходе эксперимента воздух остаётся однородным.

1. При каком значении ω_1 угловой скорости начальное положение равновесия поршня перестанет быть устойчивым?
2. На каком расстоянии x_1 от начального положения установится поршень при неизменной угловой скорости ω_1 ?
3. Теперь частоту вращения начали медленно уменьшать. При каком значении ω_2 поршень вернётся в исходное положение?



10.4. Заряженный шар (классика)

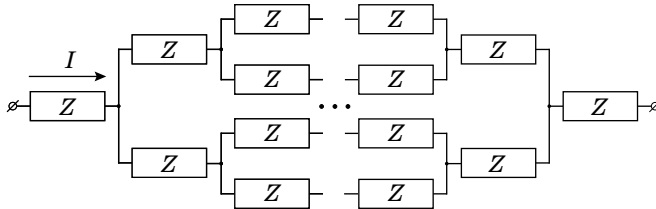
Проводящий шар радиусом R имеет сферическую полость радиусом r , касающуюся наружной поверхности шара. Заряд шара равен Q . В полости, на расстоянии r_1 от ее центра, находится точечный заряд q_1 . Вне шара, на расстоянии r_2 от его центра, находится точечный заряд q_2 .

1. Найдите потенциал $\varphi_{\text{ш}}$ шара.
2. Найдите потенциал φ_0 в центре O полости.

Потенциал бесконечно удаленных точек примите равным нулю.

10.5. Нелинейность

Нелинейный элемент Z имеет вольтамперную характеристику $I_Z = \alpha U_Z^2$, где $\alpha = 0,07 \text{ А/В}^2$. Получите формулу зависимости силы тока I от напряжения в цепи, составленной из бесконечного числа нелинейных элементов Z .

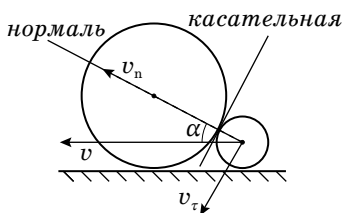


РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

10.1. (Воробьев И.) 1. *Общее рассмотрение*

Сначала столкнутся шайбы. После их столкновения большая шайба станет удаляться от стенки, меньшая полетит к стенке и отскочит от неё. Так как зазор со стенкой мал, то столкновение с ней произойдёт сразу после первого и расположение шайб можно считать не изменившимся. Если скорость меньшей шайбы после отскока окажется такова, что она догонит большую, то произойдёт ещё одно столкновение шайб. Чтобы понять, возможны ли дальнейшие столкновения, найдем скорости после упомянутых выше столкновений.

2. *Первый контакт шайб*



а) Через точку контакта шайб при ударе проведём касательную и нормаль через центры шайб. Нормаль образует угол α со стенкой и с направлением скорости v . Находим, что $\sin\alpha = (R - r)/(R + r) = 3/4$.

б) Проекция скорости v на нормаль $v_n = v\cos\alpha$, а на касательную $v_\tau = v\sin\alpha$.

3. *Скорости после первого столкновения*

а) Пусть скорости шайб после 1-го удара v_1 и u_1 . Так как трения нет, то силы при столкновении направлены по нормали, и проекции на касательную у шайб не изменятся $u_{1\tau} = 0$; $v_{1\tau} = v_\tau$.

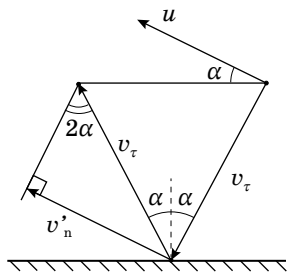
б) Применяя законы сохранения энергии и импульса для упругого столкновения тел равной массы, получим нормальные составляющие скоростей шайб после удара $u_{1n} = v_n$; $v_{1n} = 0$.

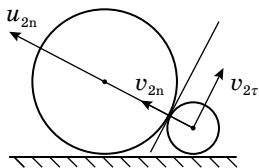
4. *Отражение от стенки*

а) Скорость меньшей шайбы после первого столкновения равна v_τ и образует угол α с перпендикуляром к стенке, после упругого отражения от стенки она сохранит свою величину и будет направлена под углом 2α к касательной (угол падения равен углу отражения)

б) При $v_\tau \sin 2\alpha > u_{1n}$ меньшая шайба догонит большую. Это произойдет при:

$\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha > \cos\alpha$. И $\sin^2\alpha > 1/2$, что при данных r и R заведомо выполнено.





5. Второе столкновение шайб

а) По аналогии с пунктом 3, нормальные составляющие скоростей шайб после второго столкновения $v_{2n} = u_{1n} = v_n$; $u_{2n} = v'_n = v_\tau \sin 2\alpha$, а касательные составляющие не изменились. Теперь $u_{2n} > v_{2n}$.

б) После второго удара шайбы удаляются от стенки и друг от друга, столкновений больше не будет.

в) После всех столкновений скорость большой шайбы $u = u_{2n} = v_\tau \sin 2\alpha = 2v \sin^2 \alpha \cos \alpha = (9\sqrt{7}/32)v \approx 0,74v$.

10.2. (Петров В.). Сила трения F_B между автомобилем и воздухом и сила трения качения F_K уравниваются силой трения F_T между колесами и дорогой. Момент силы трения M равен по модулю моменту, развиваемому двигателем машины:

$$M = F_T r = F_B r + F_K r, \text{ где } r - \text{ радиус колес машины.}$$

Мощность, развиваемая двигателем:

$$P = M\omega = M \frac{v_{\text{отн}}}{r} = (F_B + F_K) v_{\text{отн}}$$

Здесь $v_{\text{отн}}$ – скорость движения автомобиля относительно конвейера, ω – угловая скорость вращения колёс.

По условию $F_B = kv_B^2$, где v_B – скорость движения воздуха относительно автомобиля.

В случае неподвижного конвейера и отсутствия ветра:

$$\frac{P}{2} = kv_0^3 = F_K v_0 \tag{0}$$

Отсюда:

$$k = \frac{P}{2v_0^3}$$

$$F_K = \frac{P}{2v_0}$$

В случае неподвижного конвейера и дующего навстречу ветра:

$$P = (k(v_1 + v_0)^2 + F_K)v_1 \tag{1}$$

$$P = \left(\frac{P}{2v_0^3}(v_1 + v_0)^2 + \frac{P}{2v_0} \right) v_1$$

$$\left(\frac{v_1}{v_0} \right)^3 + 2 \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{v_1}{v_0} \right) - 2 = 0$$

$$v_1 \approx 0,575v_0 \approx 11,5 \text{ м/с}$$

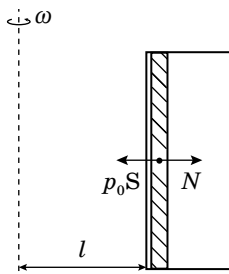
В случае движущегося конвейера:

$$P = (kv_2^2 + F_K)(v_0 + v_2) \tag{2}$$

$$P = \left(\frac{Pv_2^2}{2v_0^3} + \frac{P}{2v_0} \right) (v_0 + v_2)$$

$$\left(\frac{v_2}{v_0} \right)^3 + \left(\frac{v_2}{v_0} \right)^2 + \left(\frac{v_2}{v_0} \right) - 1 = 0$$

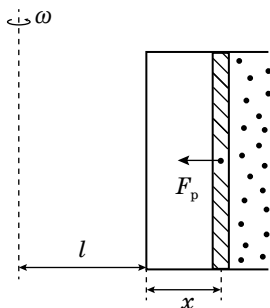
Решив численно это уравнение, получим $v_2 \approx 0,544v_0 \approx 10,9$ м/с.



10.3. (Аполонский А.) **1.** Найдём силу реакции N ближней к оси вращения стенки цилиндра, действующую на поршень в исходном положении. По II закону Ньютона: $m\omega^2 l = p_0 S - N$.

По мере увеличения ω сила $N = p_0 S - m\omega^2 l$ уменьшается. Отрыв от стенки может произойти, когда N станет равной нулю, то есть $p_0 S - m\omega^2 l = 0$, откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0 S}{ml}} = \omega_0.$$



2. При постоянной температуре для идеального газа выполняется следующее соотношение: $pV = p_0 Sa = \text{const}$. Пусть x – смещение поршня по отношению к его исходному положению, тогда $V = S(a - x)$. Газ действует на поршень с силой, равной $F_p = pS = \frac{a}{a - x} p_0 S$.

Тогда: $m\omega^2(l + x) = \frac{a}{a - x} p_0 S$ или

$$x^2 - x(a - l) + \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) al = 0.$$

Это квадратное уравнение определяет положение равновесия поршня при некоторой угловой скорости вращения ω .

При $\omega = \omega_0$ одно из положений равновесия $x_0 = 0$, а второе – $x_1 = a - l$.

x_0 соответствует неустойчивому положению равновесия, так как при $x_0 < x < x_1$:

$$m\omega_0^2(l + x) > \frac{a}{a - x} p_0 S.$$

Это означает, что при небольшом смещении поршня от положения $x_0 = 0$ сила давления газа не сможет удержать поршень. При $\omega_1 = \omega_0 = 22,4$ с⁻¹ его начальное положение равновесия неустойчиво и поршень перейдет в устойчивое положение $x_1 = a - l = 0,4$ м.

3. При медленном уменьшении угловой скорости вращения при некотором значении $\omega = \omega_2$ корни квадратного уравнения совпадают. В результате, положение равновесия поршня при смещении влево оказывается неустойчивым, и поршень возвращается в исходное положение $x_0 = 0$.

Найдем ω_2 , приравняв дискриминант к нулю:

$$D = (a - l)^2 - 4al \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_2^2} - 1 \right) = 0.$$

Отсюда

$$\omega_2 = \frac{2\sqrt{al}}{a+l} \omega_0 = 16,7 \text{ с}^{-1}.$$

10.4. (Чивилев В.) В материале шара поля нет, так как он проводящий. Окружим полость некоторой поверхностью, поток вектора \vec{E} через неё равен нулю, поэтому сумма зарядов, окружённых ей, (т. е. q_1 и индуцированного заряда на стенке полости) по теореме Гаусса равна нулю. Значит, индуцированный заряд на стенке полости равен $-q_1$. Так как объёмных зарядов в проводнике нет, а суммарный заряд шара Q , заряд на поверхности шара $Q + q_1$.

Заряды внутри и на стенке полости распределены так, что не создают поля снаружи от полости. Значит, полость вместе с зарядом q_1 и индуцированными зарядами на её стенке можно удалить, при этом потенциалы точек вне полости (в том числе и потенциал шара) не изменится. Мысленно проделав это, найдём потенциал шара как потенциал его центра (потенциалы всех точек проводника одинаковы). Он создаётся только зарядом на поверхности $Q + q_1$ и зарядом q_2 .

Разбивая поверхность шара на малые участки с зарядами ΔQ_i , получим, что поверхностный заряд создаёт в центре потенциал:

$$\varphi_1 = \sum_i \frac{k\Delta Q_i}{R} = \frac{k}{R} \sum_i \Delta Q_i = \frac{k(Q + q_1)}{R}.$$

Таким образом, потенциал шара:

$$\varphi_{\text{ш}} = k \left(\frac{Q + q_1}{R} + \frac{q_2}{r_2} \right).$$

Рассмотрим разность потенциалов φ_0 в центре полости и φ_A в некоторой точке A на её стенке. Заряд q_1 и заряд $-q_1$ на стенке полости (вклад которого в φ_0 рассчитывается аналогично φ_C , не зависит от распределения заряда по стенке и равен $k(-q_1)/r$) создают потенциалы:

$$\varphi'_0 = \frac{kq_1}{r_1} - \frac{kq_1}{r} \quad \text{— в центре полости;}$$

$$\varphi'_A = 0 \quad \text{— в точке А.}$$

Заряд на поверхности шара экранирует поле q_2 , т. е. эти заряды не создают поля внутри шара, а значит, не влияют на разность потенциалов $\varphi_0 - \varphi_A$, где $\varphi_A = \varphi_{\text{ш}}$. Таким образом:

$$\varphi_0 - \varphi_A = \varphi'_0 - \varphi'_A = \frac{kq_1}{r_1} - \frac{kq_1}{r} \quad ;$$

$$\varphi_0 = k \left(\frac{Q + q_1}{R} + \frac{q_2}{r_2} + q_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \right).$$

10.5. (Киреев А.) Так как все элементы одинаковы, токи в каждом узле будут делиться поровну, как показано на рисунке.

Тогда напряжение на элементах:

$U_1 = \sqrt{\frac{I}{\alpha}}$; $U_2 = \sqrt{\frac{I}{2\alpha}}$; $U_3 = \sqrt{\frac{I}{4\alpha}}$ и т. д., где I — общая сила тока в цепи.

Напряжение, приложенное к цепи: $U = 2(U_1 + U_2 + U_3 + \dots)$.

$$(U_1 + U_2 + U_3 + \dots) = \sqrt{\frac{I}{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \dots \right).$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \dots \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$U = 2\sqrt{\frac{I}{\alpha}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$I = \alpha U^2 \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{8} = \gamma U^2, \text{ где}$$

$$\gamma = \alpha \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{8} = 1,5 \text{ мА/В}^2.$$

