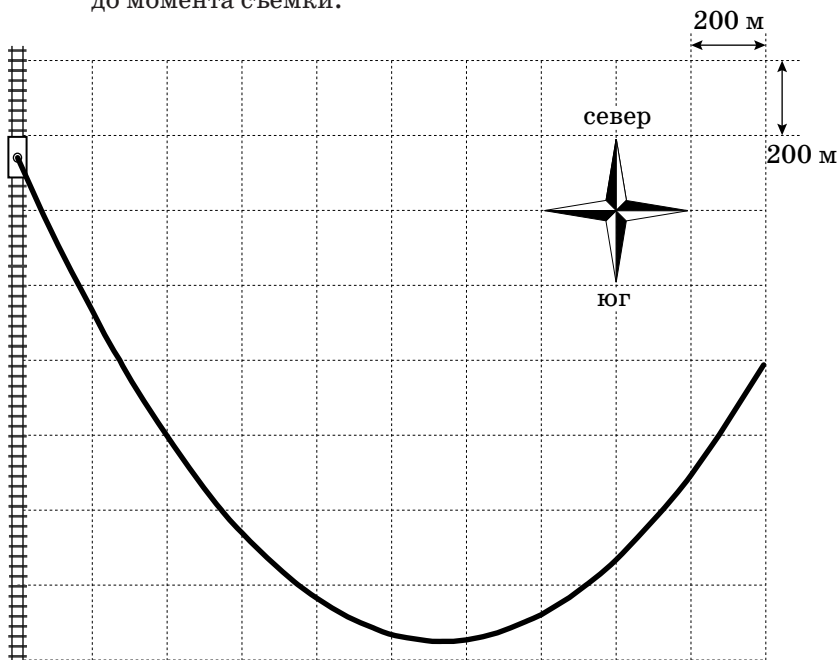
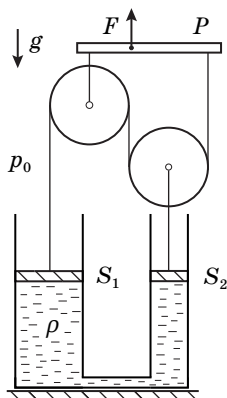


9 КЛАСС**9.1. Паровоз**

При проведении аэрофотосъемки местности в кадр попал шлейф дыма от паровоза, начавшего свое движение из состояния покоя с постоянным ускорением $a = 0,05 \text{ м/с}^2$ по прямому участку железной дороги. На фотографии виден весь шлейф от самого начала движения. Одной клетке соответствует расстояние 200 м. Считая скорость ветра постоянной, определите:

1. В каком направлении двигался паровоз?
2. Под каким углом α к железной дороге дул ветер?
3. Скорость ветра v_0 .
4. Минимальную скорость ветра v_{\min} относительно паровоза.
5. Время движения паровоза τ от начала движения до момента съемки.
6. Расстояние s , которое прошел паровоз от начала движения до момента съемки.





9.2. Блоки и цилиндры

В двух сообщающихся сосудах, площади сечения которых S_1 и S_2 , находится жидкость плотностью ρ . Сосуды герметично закрыты поршнями, которые могут перемещаться под действием системы блоков и нерастяжимых нитей связанных с рычагом P (см. рисунок). Вначале нити не натянуты и не провисают, а поршни соприкасаются с жидкостью. Рычаг медленно смещают вверх на небольшое расстояние h так, что он остается горизонтальным, а нити вертикальными.

1. В предположении, что $S_1 > S_2$, определите, в каких направлениях и на какие расстояния сместятся поршни. Какую силу F_1 необходимо прикладывать к рычагу, чтобы удерживать его после смещения на расстояние h ?
2. Какая сила F_2 потребуется для перемещения рычага вверх на расстояние h при $S_2 = 2S_1$?

Массами рычага, блоков, нитей и поршней можно пренебречь. Трения нет. Сосуды от подставки не отрываются. Давление паров жидкости гораздо меньше атмосферного давления p_0 . Ускорение свободного падения g .

9.3. Прилетевший пластилин

Кусок пластилина массой m , упав без начальной скорости с некоторой высоты, прилип к бруску такой же массы, движущемуся по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью $v_0 = 4$ м/с под действием постоянной горизонтальной силы. Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0,2$. Определите скорость v_1 бруска через время $t_1 = 1$ с после начала падения пластилина. Постройте график зависимости скорости бруска v от времени t после начала падения пластилина для двух случаев: а) с высоты $h_a = 10$ м; б) с высоты $h_b = 25$ м, указав на нем координаты характерных точек.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

9.4. Струйное нагревание

В пустой теплоизолированный сосуд наливают воду при температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$ струйкой с массовым расходом $\mu = 2,0$ г/с. Когда в сосуде оказывается $m = 100$ г воды, в нем включается нагреватель мощностью $N = 200$ Вт. Температура содержимого сосуда измеряется помещенным в него ртутным термометром.

Определите:

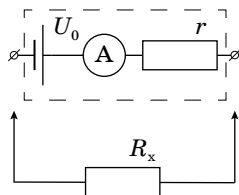
1. Через какое время τ_1 с момента включения нагревателя температура воды в сосуде увеличится до $t_1 = 30^\circ\text{C}$?
2. До какой максимальной температуры t_{\max} сможет нагреться содержимое сосуда?

Выведите зависимость скорости v подъема столбика ртути термометра от времени τ с момента включения нагревателя, если на его шкале расстояние между отметками t_0 и t_1 равно $l = 2,0$ см. Определите скорость подъема столбика при температуре t_1 .

Удельная теплоемкость воды равна $c = 4200$ Дж/(кг \cdot °C). Процессы теплообмена происходят быстро, теплоемкости термометра и сосуда малы.

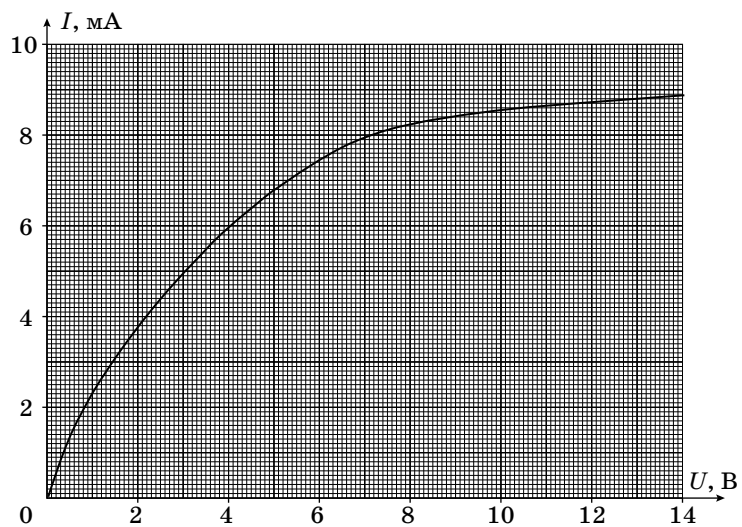
9.5. Нелинейные показания

По упрощенной модели омметр состоит из соединенных последовательно идеального источника постоянного напряжения U_0 , резистора сопротивлением r и идеального амперметра (см. рисунок). При подключении к омметру резистора сопротивлением R_x показания амперметра автоматически пересчитываются так, что на цифровом табло прибора отображается значение сопротивления подключенного резистора.



Омметр при подключении к нелинейному элементу Z , вольт-амперная характеристика которого приведена ниже, показывает сопротивление $R_z = 800$ Ом. Если параллельно к элементу Z подключить резистор сопротивлением $R = 1,0$ кОм, омметр покажет значение $R_1 = 400$ Ом. Определите напряжение U_0 источника омметра и его сопротивление r . Найдите показания омметра R_2 при подключении к нему нелинейного элемента Z и резистора сопротивлением R , соединенных последовательно.

Примечание: Необходимые для решения построения выполните на выданном отдельном бланке и сдайте его вместе с работой.



РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

9.1. (Замятнин М.) Направление ветра можно оценить с помощью касательной, проведенной к начальному участку графика. Ветер дует от железной дороги в северо-восточном направлении, примерно под углом 30° к меридиану. Из закона сложения скоростей нетрудно заметить, что при движении паровоза с севера на юг, угол между шлейфом и железной дорогой по мере разгона должен уменьшаться, но он увеличивается, следовательно, паровоз движется с юга на север.

Так как движение паровоза равноускоренное из состояния покоя, то зависимость модуля его скорости от времени имеет вид: $u(t) = at$. Введем систему координат, направив ось OX перпендикулярно, а ось OY вдоль железной дороги, выбрав ноль в начальной точке шлейфа. В системе отсчета (СО) ветра проекции скорости паровоза на оси OX и OY равны:

$$w_y = u(t) + v_0 \cos \alpha$$

$$w_x = v_0 \sin \alpha$$

Координаты паровоза от времени (в СО ветра) изменяются следующим образом:

$$y(t) = v_0 \cos \alpha t + \frac{at^2}{2} \quad (\text{площадь под графиком } w_y(t))$$

$$x(t) = v_0 t \sin \alpha$$

Так как форма шлейфа не изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой, уравнение траектории паровоза в СО ветра совпадает с уравнением траектории дыма и имеет вид:

$$y = \frac{ax^2}{2v_0^2 \sin^2 \alpha} + x \operatorname{ctg} \alpha$$

Это уравнение параболы, координаты вершины которой x_0 и y_0 равны:

$$x_0 = \frac{v_0^2}{a} \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{и} \quad y_0 = \frac{v_0^2}{2a} \cos^2 \alpha$$

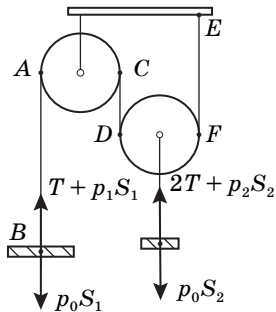
Из рисунка находим $y_0 = 750$ м и $x_0 = 870$ м, тогда $y_0 = \frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha}{2}$, из чего убеждаемся, что $\operatorname{ctg} \alpha = 1,72$ ($\alpha = 30^\circ$).

Зная угол, можно найти скорость ветра: $v_0 = \frac{\sqrt{2ay_0}}{\cos \alpha} = 10$ м/с. Заметим, что расстояние между крайними (по оси x) точками параболы равно $\Delta x = 2000$ м. Но, $\Delta x = v_0 \tau \sin \alpha$, где τ – время всего движения паровоза. Откуда $\tau = \Delta x / v_0 \sin \alpha = 400$ с и расстояние, пройденное паровозом $s = a\tau^2 / 2 = 4000$ м. В принципе, это расстояние можно найти, определив положение начальной точки дви-

жения паровоза, продлив касательную, проведенную к началу шлейфа до пересечения с железной дорогой. Минимальная скорость ветра относительно паровоза равна $v_{\min} = v_0 \sin \alpha = 5 \text{ м/с}$.

9.2. (Аполонский А.) Объем жидкости не изменяется, следовательно поршни могут перемещаться только в противоположных направлениях. Поршень S_2 смещается вверх, а S_1 – вниз. Пусть при перемещении рычага вверх на h , правый поршень поднялся на x , а левый опустился на y . Тогда из-за несжимаемости жидкости $y = xS_2/S_1$. Рассмотрим изменение длин вертикальных участков нити AB , CD и EF . Длина AB увеличивается на $\Delta l_1 = h + y$, длина участков CD и EF уменьшается на $\Delta l_2 = x - h$. Длина нити не меняется, поэтому $\Delta l_1 = 2\Delta l_2$. Следовательно $h + y = 2x - 2h$. Откуда:

$$x = \frac{3hS_1}{(2S_1 - S_2)}, \text{ а } y = \frac{3hS_2}{(2S_1 - S_2)}.$$



На поршни действуют силы натяжения (на левый действует сила T , а на правый $2T$), сила давления атмосферы и сила давления, действующая со стороны жидкости. Пусть p_1 давление в жидкости под поршнем в левом цилиндре. Давление под правым поршнем будет равно:

$$p_2 = p_1 - \rho g(x + y) = p_1 - \rho g x(1 + S_2/S_1).$$

Условие равновесия для левого поршня: $T + p_1S_1 = p_0S_1$. Для правого: $2T + p_2S_2 = p_0S_2$. Откуда:

$$p_1 = p_0 - \rho g x \frac{S_2(S_1 + S_2)}{(2S_1 - S_2)S_1}$$

$$T = (p_0 - p_1)S_1 = \rho g x \frac{S_2(S_1 + S_2)}{(2S_1 - S_2)S_1}$$

Сила F , приложенная к рычагу равна: $F = 3T = 9\rho g h \frac{S_1 + S_2}{(2S_1 - S_2)^2}$.

При $S_2 = 2S_1$ на правый поршень действуют силы давления и натяжения вдвое большие, чем на левый, поэтому поршни не могут двигаться в противоположных направлениях. Следовательно смещение поршней возможно лишь при их отрыве от поверхности жидкости. При перемещении рычага силы не изменяются и равны: $T = p_0S_1$, $F = 3T = 3p_0S_1$.

9.3. (Замятин М.) Пластилин, падая свободно с высоты h_1 за

время $\tau_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ приобретает скорость $u_i = \sqrt{2gh_i}$.

Так как брусок до удара движется равномерно, внешняя сила тяги равна $F = \mu mg$. В момент слипания тел на систему действуют две внешние ударные силы: трения, нормальной реакции опоры и две внешние постоянные силы: тяжести и тяги. За бесконечно малое время удара роль постоянных сил в изменении импульса системы пренебрежима. Запишем изменение импульса системы с учетом ударных сил (теорему о движении центра масс системы в импульсной форме). На горизонтальную ось: $\Delta p_x = -\mu N \Delta t$; на вертикальную: $\Delta p_y = N \Delta t$. Учитывая, что скольжение бруска не прекращается за время слипания: $\Delta p_x = -\mu \Delta p_y$, или $2mv_k - mv_0 = -\mu ti$, откуда скорость системы сразу после слипания $v_k = (v_0 - \mu i)/2$.

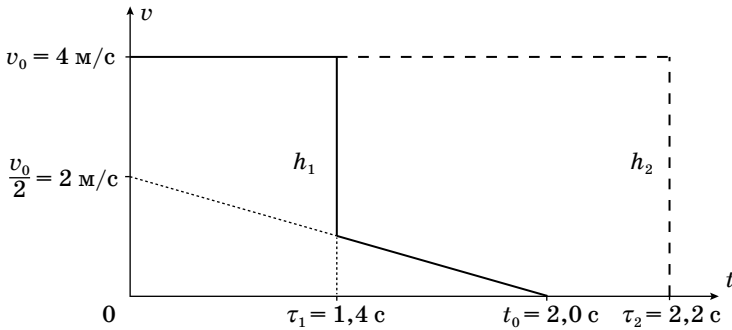
Из второго закона Ньютона, записанного для системы после слипания: $2ma = F - 2\mu mg$, следует, что под действием внешней силы тяги система будет двигаться равнозамедленно с ускорением $a = \mu g/2$. Окончательно зависимость скорости системы от времени приобретает вид $v = v_k - a(t - \tau) = (v_0 - \mu i - \mu g(t - \tau))/2 = (v_0 - \mu gt)/2$. Скорость не зависит от начальной высоты падения пластилина! Полученная зависимость верна для времен $t > \tau$. Поэтому при падении с высот больших, чем $h_1 = 5$ метров скорость бруска через 1 с не изменится и будет равна 4 м/с, но при падении с меньших высот она окажется равной $v = (v_0 - \mu gt_1)/2 = 1$ м/с.

Для любых высот падения пластилина скорость бруска обращается в ноль при $t_0 = v_0/\mu g = 2$ с.

Следует заметить, что ответ на скорость системы угадывается. Если в силу существования решения задачи предположить, что от высоты падения пластилина конечная скорость системы не зависит, то для определенности начальную высоту можно взять нулевой. Тогда сразу пишется ответ $v = (v_0 - \mu gt)/2$. Но такое решение нельзя засчитывать, как правильное, так как оно получено для вырожденного случая и гарантированно не обобщается.

Приведенное выше решение получено в предположении, что брусок не останавливается (его не заклинивает) в момент удара. Для указанных численных данных заклинивание возможно при падении пластилина с высот более $h = v_0^2/(2\mu^2 g) = 20$ м.

График зависимости скорости бруска от времени получается путем шивки постоянной скорости бруска до соударения с выведенной выше зависимостью со скачком во время удара.



9.4. (Зикрацкий Г.) Запишем уравнение теплового баланса для времени τ_1 :

$$N\tau_1 = (m + \mu\tau_1)c(t_1 - t_0)$$

$$\tau_1 = \frac{mc(t_1 - t_0)}{N - \mu c(t_1 - t_0)} = 36 \text{ с}$$

Максимальная температура t_{\max} достигается при обращении в ноль знаменателя и равна:

$$t_{\max} = \frac{N}{\mu c} + t_0 = 44 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Рассмотрим небольшой интервал времени $\Delta\tau$ через время τ после начала нагрева за который в систему поступает $\mu\Delta\tau$ воды при комнатной температуре. Из уравнения теплового баланса:

$$N\Delta\tau = (m + \mu\tau)c\Delta t + \mu\Delta\tau c(t + \Delta\tau - t_0), \text{ откуда}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{Nm}{c(m + \mu\tau)^2}$$

Так как $\tau = \tau_1$ и с учетом размера шкалы, искомая скорость равна:

$$v = \frac{Nml}{(t_1 - t_0)c(m + \mu\tau)^2} = 0,32 \text{ мм/с}.$$

9.5. (Киреев А.) При подключении к нелинейному элементу Z показания омметра равны $R_z = U_z/I_z = 0,8$ кОм, что соответствует силе тока $I_z = 7,5$ мА и напряжению $U_z = 6$ В на нелинейном элементе (точка A на рисунке).

Вольтамперная характеристика участка цепи, содержащего соединённые параллельно нелинейный элемент Z и резистор R , имеет вид, представленный на рисунке (зависимость 1, её можно построить, учитывая, что при параллельном соединении двух элементов общим для них является напряжение, а сила тока через участок цепи равна сумме сил токов через каждый элемент). Показания омметра при этом $R_1 = U_1/I_1 = 0,4$ кОм, что соответствует силе тока $I_1 = 10$ мА и напряжению $U_1 = 4$ В на участке цепи (точка B на рисунке).

Так как омметр содержит источник постоянного напряжения и сопротивление, то для него можно построить нагрузочную прямую (см. рисунок), которая должна пройти через точки A и B и задается уравнением:

$$I = -\frac{U}{R} + \frac{U_0}{R}.$$

По точкам пересечения нагрузочной прямой с осями координат определяем напряжение источника $U_0 = 12$ В (при $I = 0$) и сопротивление $r = U_0/I = 0,8$ кОм (при $U = 0$).

Вольтамперная характеристика участка цепи, содержащего соединённые последовательно нелинейный элемент Z и резистор R , имеет вид, представленный на рисунке (зависимость 2 можно построить, учитывая, что при последовательном соединении двух элементов общей для них является сила тока, а напряжение на участке цепи равно сумме напряжений на каждом элементе). Показания омметра можно найти по координатам точки пересечения C нагрузочной прямой и кривой 2: $R_2 = U_2/I_2 = 1,6$ кОм.

